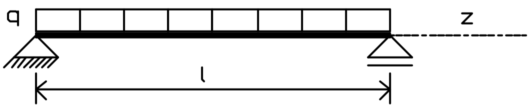
Ejercicio Nº: 1

Determinar el trabajo de deformación en una viga prismática apoyada en los extremos y cargada uniformemente (despreciar influencia del esfuerzo cortante).



E.I=cte

a) Solución 1 - Calcular el trabajo interno:

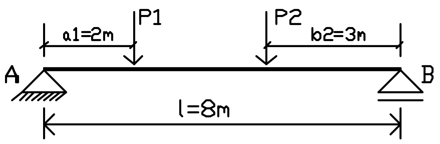
$$U_i = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l \left(q\frac{l}{2}x - q\frac{x}{2} \right)^2 dx = \frac{q^2 l^5}{240EI}$$

b) Solución 2 - Calcular el trabajo externo:

$$T_e = \frac{1}{2}\int_0^l .q.dx.y = \frac{1}{2}\int_0^l .q\frac{q}{24EI}\left(l^3 x - 2lx^3 + x^4 \right) dx = \frac{q^2 l^5}{240EI}$$

Ejercicio Nº:2

Calcular el trabajo de deformación en la viga de la figura aplicando el teorema de Clapeyron y utilizando los coeficientes de influencia.



Datos:
P_1=600 kg. E=2,1*10^6 kg/cm^2
P_2=500 kg I=1446 cm^4

$$T_e = \frac{1}{2}\sum P\delta = \frac{1}{2}\left(P_1\delta_1 + P_2\delta_2\right) = \frac{1}{2}\left[P_1\left(P_1\delta_{11} + P_2\delta_{12}\right) + P_2\left(P_1\delta_{21} + P_2\delta_{22}\right)\right]$$

$$\text{De Tabla} \rightarrow \delta_{ii} = \frac{1a_i^2 b_i^2}{3EI.l} \; ; \; \delta_{ij} = \frac{1a_i b_j}{6EI.l}\left[l^2 - a_i^2 - b_j^2\right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1 * \overline{200}^2 * \overline{600}^2}{3 * 2{,}1 * 10^6 * 1446 * 800} = 0{,}001976 cm / kg$$

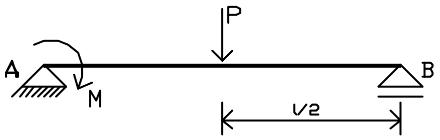
$$\delta_{22} = \frac{1 * \overline{500}^2 * \overline{300}^2}{3 * 2{,}1 * 10^6 * 1446 * 800} = 0{,}003087 cm / kg$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1 * 200 * 300 * (\overline{800}^2 - \overline{200}^2 - \overline{300}^2)}{6 * 2{,}1 * 10^6 * 1446 * 800} = 0{,}002099 \text{cm / kg}$$

$$T_e = \frac{1}{2}\left[P_1^2.\delta_{11} + 2P_1P_2.\delta_{12} + P_2^2.\delta_{22}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\overline{600}^2 * 0{,}001976 + 2 * 600 * 500 * 0{,}002099 + \overline{500}^2 * 0{,}003087\right] =$$
$$= 1.371{,}26 \text{Kgcm}$$

<u>Ejercicio Nº:3</u>

Determinar el trabajo de deformación en la viga prismática de la figura, sometida a carga P en el centro y a un par M en el extremo A, aplicando teorema de Clapeyron.



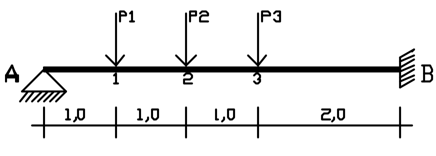
Desplazamientos: $y_{l/2} = \frac{pl^3}{48EI} + \frac{Ml^2}{16EI}$; $\varphi_A = \frac{pl^2}{16EI} + \frac{Ml}{3EI}$

Aplicando T.C. $\rightarrow T_e = \frac{1}{2}\left[P.y_{l/2} + M.\varphi_A\right]$

$$T_e = \frac{P^2l^3}{96EI} + \frac{M^2l}{6EI} + \frac{PM.l^2}{16EI}$$

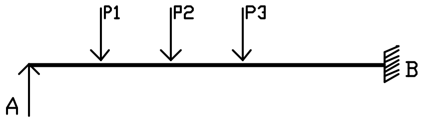
<u>Ejercicio Nº:4</u>

Calcular el valor de la reacción A de la viga de la figura.



<u>Datos</u>:
P_1=1,2 t
P_2=0,5 t
P_3=0,8 t

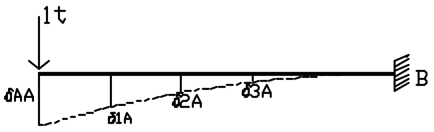
a) Solución 1- La reacción A está determinada por la condición de que el punto A no desciende si se suprime el apoyo sustituyéndola por la reacción.



En base a los coeficientes de influencia podríamos escribir que:

$$\delta_A = P_1.\delta_{A1} + P_2.\delta_{A2} + P_3.\delta_{A3} - A.\delta_{AA} = 0$$

Por Maxwell sabemos que $\delta_{Ai} = \delta_{iA}$



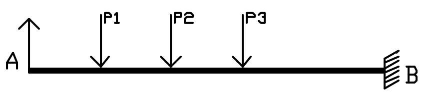
$$\delta_{AA} = \frac{41{,}67}{EI}(tm^3) \qquad A = \frac{1{,}2 * 29{,}33 + 0{,}5 * 18{,}0 + 0{,}8 * 8{,}67}{41{,}67} = 1{,}23t$$

$$\delta_{1A} = \frac{29{,}33}{EI}(tm^3)$$

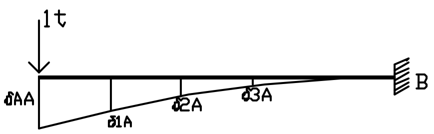
$$\delta_{2A} = \frac{18{,}00}{EI}(tm^3)$$

$$\delta_{3A} = \frac{8{,}67}{EI}(tm^3)$$

b) Solución 2 – Considerando dos estados de carga y aplicando Betti:



Estado I $(\delta_A = 0)$



Estado II

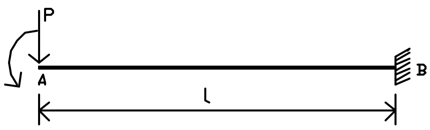
Por Betti $\rightarrow U_{I,II} = U_{II,I}$; $U_{II,I} = 1t * 0$

$$U_{I,II} \rightarrow -A.\delta_{AA} + P_1.\delta_{1A} + P_2.\delta_{2A} + P_3.\delta_{3A} = 0$$

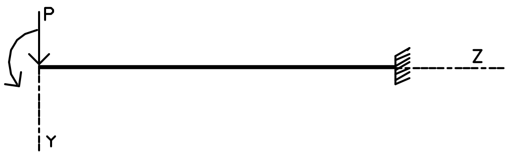
Ejercicio Nº:5

Cálculo de desplazamientos

Sea una viga en voladizo solicitada en su extremo libre por una carga P y un momento M. Se pide calcular la traslación δ_A y el giro φ_A .



a) Cálculo aplicando teorema de Castigliano



$$M_Z = M + P.z$$

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l .(M + P.z)^2 dz$$

Buscamos el descenso:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2EI}\int_0^l .2(M + P.z)(z).dz = \frac{1}{EI}\left[M\frac{l^2}{2} + P\frac{l^3}{3}\right] = \delta_A$$

Para la rotación:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{2EI}\int_0^l .2(M + P.z)dz = \frac{1}{EI}\left[M.l + P\frac{l^2}{2}\right] = \varphi_A$$

b) Cálculo aplicando P.T.V.
Diagrama M para estado de deformaciones

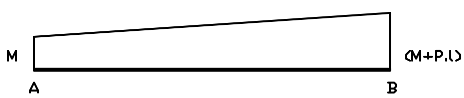
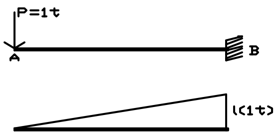
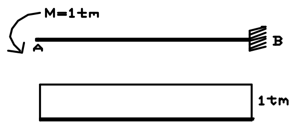


Diagrama $\overline{M}$ para estado virtual de cargas

Para traslación



Para rotación



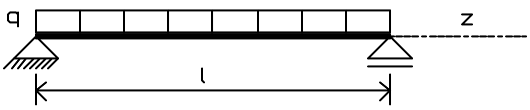
Traslación $\rightarrow \bar{1}t.\delta_A = \frac{1}{EI}\left\{+\frac{l(1t)}{6}\left[M + 2(M + P.l)\right].l\right\} \rightarrow \delta_A = \frac{1(1t)}{(1t)EI}\left[\frac{M.l^2}{2} + \frac{P.l^3}{3}\right]$

Rotación $\rightarrow \bar{1}tm.\varphi_A = \frac{1}{EI}\left\{+\frac{1(tm)}{2}\left[M + (M + P.l)\right].l\right\} \rightarrow \varphi_A = \frac{1(tm)}{(1tm)2EI}\left[2M.l + P.l^2\right]$

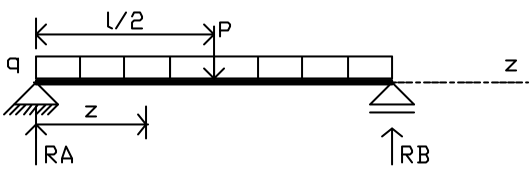
Ejercicio Nº:6

Aplicación Teorema De Castigliano.

Sea una viga simplemente apoyada, solicitada con una carga uniformemente repartida, de momento de inercia constante. Se pide el descenso de la sección media del tramo.



Para aplicar Castigliano, suponemos que en la sección media actúa una carga puntual P en la dirección del desplazamiento requerido.



$$\boxed{R_A = q\frac{l}{2} + \frac{p}{2}}$$

$U = \int .\frac{M^2}{2EI}.dz$ despreciando la influencia del esfuerzo de Corte

En una sección genérica $0 \leq z \leq l/2 \rightarrow M = R_A.z - q\frac{z^2}{2}$

$$U = 2\int_0^{l/2} .\frac{M^2}{2EI}.dz$$

$$U = \frac{1}{EI}\int_0^{l/2} .\left[\left(q\frac{l}{2}+\frac{P}{2}\right).z - q\frac{z^2}{2}\right]^2 dz \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{l/2} .\left\{\left(q\frac{l}{2}+\frac{P}{2}\right)^2 z^2 - \left(\frac{q.l}{2}+\frac{P}{2}\right)q.z^3 + \left(q\frac{z^2}{2}\right)^2\right\}dz$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{q^2l^2}{12}z^3 + \frac{q.l.P}{6}z^3 + \frac{P^2}{12}z^3 - \frac{q^2.l}{8}z^4 - \frac{P.q}{8}z^4 + \frac{q^2}{20}z^5\right]_0^{l/2}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{q^2l^5}{240} + \frac{5}{384}q.l^4P - \frac{P^2.l^3}{96}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0 + \frac{5}{384}\frac{q.l^4}{EI} - \frac{1}{48}\frac{P.l^3}{EI}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_{(P=0)} = \frac{5}{384}\frac{q.l^4}{EI} = \delta^v_{z=l/2}$$: descenso de la sección media.

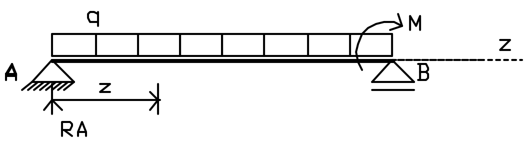
Se simplifica el trabajo, buscando la $\partial U/\partial P$ a través de la expresión (1)

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^{l/2} .2\left[\left(q\frac{l}{2}+\frac{P}{2}\right)z - q\frac{z^2}{2}\right]\frac{z}{2}.dz$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_{(P=0)} = \frac{1}{EI}\int_0^{l/2} .\left[\left(q\frac{l}{2}\right)z - q\frac{z^2}{2}\right]z.dz = \frac{1}{EI}\left[\frac{q.l}{6}z^3 - \frac{q.z^4}{8}\right]_0^{l/2}$$

$$= \frac{5}{384}\frac{q.l^4}{EI} = \delta^v_{z=l/2}$$

Para la viga dada, aplicando teorema de Castigliano hallar la rotación de la sección B.
Suponemos que además de la carga q, en la sección B actúa un momento M.



$$\boxed{Mz = \left(\frac{q.l}{2} - \frac{M}{l}\right)z - \frac{q.z^2}{2}}$$

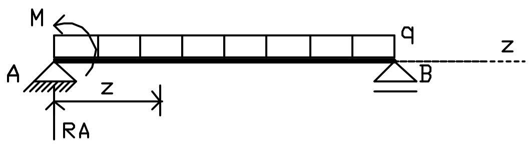
$$\boxed{R_A = \left(\frac{q.l}{2} - \frac{M}{l}\right)}$$

$$U = \int_0^l \frac{1}{2EI}\left[\left(\frac{q.l.z}{2} - \frac{M.z}{l}\right) - \frac{q.z^2}{2}\right]^2 dz$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left[\left(\frac{q.l.z}{2} - \frac{M.z}{l}\right) - \frac{q.z^2}{2}\right]\left(-\frac{z}{l}\right)dz$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{(M=0)} = -\frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{q.l.z}{2} - \frac{q.z^2}{2}\right)\left(\frac{z}{l}\right)dz = -\frac{q.l^3}{24EI} = \varphi_B$$

Idem. Hallar la rotación en A.



$$R_A = \left(\frac{q.l}{2} + \frac{M}{l}\right) \rightarrow Mz = \left(\frac{q.l}{2} + \frac{M}{l}\right)z - M - \frac{q.z^2}{2} \qquad 0 \le z \le l$$

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l \left[\left(\frac{q.l.z}{2} + \frac{M.z}{l}\right) - M - \frac{q.z^2}{2}\right]^2 dz$$

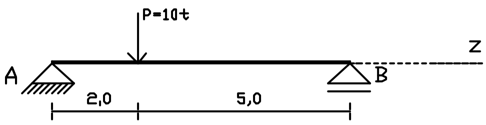
$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left[\frac{q.l.z}{2} + \frac{M.z}{l} - M - \frac{q.z^2}{2}\right]\left[\frac{z}{l} - 1\right].dz$$

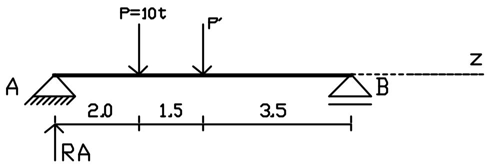
$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{(M=0)} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left[\frac{q.z^2}{2} - \frac{q.z^3}{2.l} - \frac{q.l.z}{2} + \frac{q.z^2}{2}\right].dz = -\frac{q.l^3}{24.EI} = \varphi_A$$

<u>Ejercicio Nº:7</u>

<u>Teorema de Castigliano</u>

Dada la viga y la carga de la figura, determinar en la sección media el valor del descenso. (E.I = cte.)





$$0 < z < 2{,}0 \rightarrow M = 7{,}14.z + \frac{P'z}{2}$$

$$2{,}0 < z < 3{,}5 \rightarrow M = 7{,}14.z + \frac{P'.z}{2} - 10(z - 2{,}0)$$

$$3{,}5 < z < 7{,}0 \rightarrow M = 7{,}14.z + \frac{P'.z}{2} - 10(z - 2{,}0) - P'(z - 3{,}5)$$

$$U = \frac{1}{2.EI}\left\{\int_0^{2,0}\left(7{,}14.z + \frac{P'.z}{2}\right)^2 dz + \int_{2,0}^{3,5}\left[7{,}14.z + \frac{P'.z}{2} - 10(z - 2{,}0)\right]^2 dz + \right.$$

$$\left. + \int_{3,5}^{7,0}\left[7{,}14.z + \frac{P'.z}{2} - 10(z - 2{,}0) - P'(z - 3{,}5)\right]^2 dz\right\}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P'} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{2,0}\left(7{,}14.z + \frac{P'z}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)dz + \int_{2,0}^{3,5}\left[7{,}14.z + \frac{P'.z}{2} - 10.z + 20\right]\left(\frac{z}{2}\right)dz + \right.$$

$$\left. + \int_{3,5}^{7,0}\left[7{,}14.z + \frac{P'z}{2} - 10.z + 20 - P'(z - 3{,}5)\right]\left[\frac{z}{2} - (z - 3{,}5)\right]dz\right\}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P'}\right)_{(P'=0)} = \frac{1}{EI}\left\{\left[\frac{7{,}14}{2}\frac{z^3}{3}\right]_0^{2,0} + \left[\frac{7{,}14}{2}\frac{z^3}{3} - 5.\frac{z^3}{3} + 10.\frac{z^2}{2}\right]_{2,0}^{3,5} + \right.$$

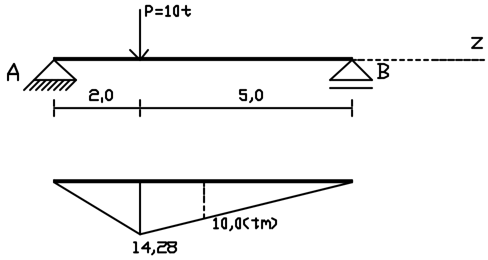
$$\left. + \left[-\frac{7{,}14}{2}\frac{z^3}{3} + 25.\frac{z^2}{2} + 5.\frac{z^3}{3} - 35.\frac{z^2}{2} - 10.\frac{z^2}{2} + 70.z\right]_{3,5}^{7,0}\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\left[1{,}19.z^3\right]_0^{2,0} + \left[-0{,}477.z^3 + 5.z^2\right]_{2,0}^{3,5} + \left[0{,}477.z^3 - 10.z^2 + 70.z\right]_{3,5}^{7,0}\right\}$$

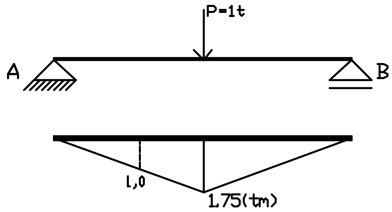
$$= \frac{1}{EI}\left\{[9{,}52] + [40{,}80 - 16{,}18] + [163{,}61 - 142{,}95].\right\} = \frac{54{,}8}{EI}\left(tm^3\right) = \delta m$$

Aplicación P.T.V.

Calcular el descenso en la sección media de la viga.



Estado virtual



$$(EI)(\bar{1}t) * \delta m = +\frac{1}{3} * 1{,}0 * 14{,}28 * 2{,}0 + \frac{1}{6}[2 * 1{,}0 * 14{,}28 + 1{,}0 * 10 + 1{,}75 * 14{,}28 +$$

$$+ 2 * 1{,}75 * 10].1{,}50 + \frac{1}{3} * 1{,}75 * 10 * 3{,}50 = 9{,}52 + 24{,}64 + 20{,}42 = 54{,}6\left(t^2 m^3\right)$$

$$\delta m = \frac{54{,}6}{EI}\left(tm^3\right)$$